РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Внимание: баллы в оценках не делятся!

Задача 1 (10.0 балла)

Задача 1.1 (3.0 балла)

Пусть ось x направлена вниз, а начальное положение центра масс рулона соответствует началу координат. Если скорость центра масс рулона в некоторый момент времени равна v, то его кинетическая энергия составляет

$$E_k = \frac{m}{L}(L-x)v^2. \quad (1)$$

С другой стороны, потенциальная энергия рулона относительно начального положения равна

$$E_p = -\frac{m}{L}g\frac{x^2}{2} - \frac{m}{L}g(L-x)x. \quad (2)$$

В начальный момент времени полная энергия равна нулю, поэтому по закону сохранения

$$E_k + E_p = 0, \quad (3)$$

откуда получаем зависимость скорости центра масс рулона от координаты

$$v^2(x) = g\left[x + \frac{x^2}{2(L-x)}\right]. \quad (4)$$

Ускорение рулона определяется выражением

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}, \quad (5)$$

которое после подстановки (4) дает следующую зависимость

$$a(x) = \frac{g}{4}\left[1 + \frac{L^2}{(L-x)^2}\right]. \quad (6)$$

Полный импульс рулона направлен вдоль оси x и равен

$$p = \frac{m}{L}(L-x)v, \quad (7)$$

а значит изменение импульса со временем принимает вид

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{m}{L}v^2 + \frac{m}{L}(L-x)a. \quad (8)$$

По условию задачи сила, действующая на платформу со стороны рулона, равна силе тяжести, а значит на сам рулон полная внешняя сила равна нулю, откуда получаем

$$\frac{dp}{dt} = 0. \quad (9)$$

Решая совместно (4), (6), (8) и (9), получаем квадратное уравнение

$$x + \frac{x^2}{2(L-x)} = \frac{1}{2}\left(L + \frac{x^2}{2(L-x)}\right), \quad (10)$$

положительный корень которого равен

$$x_0 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}L = 4.23 \text{ м}. \quad (11)$$

После подстановки в (4) и (6), соответственно находим

$$v(x_0) = \frac{\sqrt{gL}}{\sqrt[4]{3}} = 7.52 \text{ м/с}, \quad (12)$$

$$a(x_0) = g = 9.80 \text{ м/с}^2. \quad (13)$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $E_k = \frac{m}{L}(L-x)v^2$	0.2
Формула (2): $E_p = -\frac{m}{L}g\frac{x^2}{2} - \frac{m}{L}g(L-x)x.$	0.2
Формула (3): $E_k + E_p = 0$	0.1
Формула (4): $v^2(x) = g\left[x + \frac{x^2}{2(L-x)}\right]$	0.2
Формула (5): $a(x) = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$	0.2
Формула (6): $a(x) = \frac{g}{4}\left[1 + \frac{L^2}{(L-x)^2}\right]$	0.2
Формула (7): $p = \frac{m}{L}(L-x)v$	0.2
Формула (8): $\frac{dp}{dt} = -\frac{m}{L}v^2 + \frac{m}{L}(L-x)a$	0.2

Формула (9): $\frac{dp}{dt} = 0$	0.2
Формула (10): $x + \frac{x^2}{2(L-x)} = \frac{1}{2}\left(L + \frac{x^2}{2(L-x)}\right)$	0.1
Формула (11): $x_0 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}L$	0.2
Численное значение в формуле (11): $x_0 = 4.23$ м	0.2
Формула (12): $v(x_0) = \frac{\sqrt{gL}}{\sqrt[4]{3}}$	0.2
Численное значение в формуле (12): $v(x_0) = 7.52$ м/с	0.2
Формула (13): $a(x_0) = g$	0.2
Численное значение в формуле (13): $a(x_0) = 9.80$ м/с^2	0.2
Итого	**3.0**

Задача 1.2 (4.0 балла)

В начальный момент времени $t = 0$ конденсатор не заряжен и падения напряжения на подключенных сопротивлениях одинаково, то есть они соединены парадлельно, поэтому

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}, \tag{1}$$

а показания омметра составляют

$$R_0 = R(0) = A - B. \tag{2}$$

В момент времени $t = \infty$ конденсатор полностью заряжен и ток через него не течет, поэтому

$$R_\infty = r, \tag{3}$$

а показания омметра составляют

$$R_\infty = R(\infty) = A, \tag{4}$$

Решая совместно (1)-(4), получаем

$$r = 100 \text{ кОм}, \tag{5}$$

$$R = 150 \text{ кОм}. \tag{6}$$

В произвольный момент времени падение напряжения U_r на сопротивлении r равно падению напряжения U_R на сопротивлении R и падению напряжения U_C на конденсаторе C, то есть

$$U_r = U_R + U_C. \tag{7}$$

С дугой стороны по закону Ома

$$U_R = I_c R, \tag{8}$$

$$U_r = I_r r, \tag{9}$$

где I_r – сила тока, протекающего через резистор r, а I_c – сила тока, протекающего через конденсатор C и сопротивление R.

Падение напряжения на конденсаторе равно

$$U_C = \frac{q}{C}. \tag{10}$$

Отметим, что зарядка конденсатора происходит вследствие протекания тока I_0, генерируемого омметром, то есть

$$I_0 = I_r + I_C, \tag{11}$$

а ток, протекающий через конденсатор, равен производной его заряда по времени

$$I_C = \frac{dq}{dt}. \tag{12}$$

Из уравнений (7)-(12), получаем дифференциальное уравнение для q

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau_0} = I_0 \frac{r}{R+r}. \tag{13}$$

решение которого дает силу тока через конденсатор

$$I_c = I_0 \frac{r}{R+r} e^{-t/\tau_0}. \tag{14}$$

Здесь $\tau_0 = C(R + r)$.

Таким образом, емкость конденсатора равна

$$C = \frac{\tau_0}{R+r} = 400 \text{ мкФ}. \tag{15}$$

Количество выделяемой на резисторе теплоты определяется законом Джоуля-Ленца и равно

$$Q = \int_0^\infty I_c^2 R dt = \frac{I_0^2 r^2 R \tau_0}{2(R+r)^2} = 12 \text{ мДж}. \tag{16}$$

Отметим, что в принципе нет необходимости рассматривать отдельно уравнения (1)-(4), для нахождения неизвестных сопротивлений достаточно найти зависимость $R(t)$, которая имеет вид

$$R(t) = \frac{U_r}{I_0} = r - \frac{r^2}{R+r} e^{-t/\tau_0}. \tag{17}$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$	0.2
Формула (2): $R_0 = R(0) = A - B$	0.2
Формула (3): $R_\infty = r$	0.2
Формула (4): $R_\infty = R(\infty) = A$	0.2
Формула (5): $r = 100$ кОм	0.2
Формула (6): $R = 150$ кОм	0.2
Формула (7): $U_r = U_R + U_C$	0.2
Формула (8): $U_R = I_c R$	0.2
Формула (9): $U_r = I_r r$	0.2
Формула (10): $U_C = \frac{q}{C}$	0.2
Формула (11): $I_0 = I_r + I_C$,	0.2
Формула (12): $I_C = \frac{dq}{dt}$	0.2
Формула (13): $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau_0} = I_0 \frac{r}{R+r}$	0.2
Формула (14): $I_c = I_0 \frac{r}{R+r} e^{-t/\tau_0}$	0.4
Формула (15): $C = \frac{\tau_0}{R+r}$	0.2
Численное значение в формуле (15): $C = 400$ мкФ	0.2
Формула (16): $Q = \frac{I_0^2 r^2 R \tau_0}{2(R+r)^2}$	0.4
Численное значение в формуле (16): $Q = 12$ мДж	0.2
Итого	**4.0**

Задача 1.3 (3.0 балла)

Действительное изображение с меньшим угловым размером φ_1 сформировалось в результате отражения на границе «воздух-стекло» на вогнутой поверхности линзы как от вогнутого зеркала с радиусом кривизны r на расстоянии, равном фокусному расстоянию F_1 зеркала

$$\frac{1}{F_1} = \frac{2}{r}, \tag{1}$$

а значит изображение расположено от наблюдателя на расстоянии

$$a_1 = L - F_1. \tag{2}$$

Пусть φ_0 – видимый угловой размер уличного фонаря с места расположения линзы. Тогда линейный размер изображения фонаря в фокусе равен

$$l_1 = \varphi_0 F_1, \tag{3}$$

а значит угловой размер видимого изображения

$$\varphi_1 = \frac{l_1}{a_1}. \tag{4}$$

Второе изображение с большим угловым размером φ_2 – это мнимое изображение фонаря, которое сформировалось в результате отражения на границе «стекло-воздух» от выпуклой поверхности линзы. Учитывая то, что лучи, сформировавшие это изображение, дважды прошли через рассеивающую линзу с оптической силой D, а фокусное расстояние выпуклой поверхности составляет $\frac{R}{2}$, то фокусное расстояние системы равно

$$-\frac{1}{F_2} = 2D + \frac{2}{R}, \tag{5}$$

а само изображение расположено от наблюдателя на расстоянии

$$a_2 = L + F_2. \tag{6}$$

Линейный размер изображения фонаря в фокусе равен

$$l_2 = \varphi_0 F_2, \tag{7}$$

а значит угловой размер видимого изображения

$$\varphi_2 = \frac{l_2}{a_2}. \tag{8}$$

По условию $\gamma = \varphi_1/\varphi_2$, откуда получаем

$$D = \frac{\gamma+1}{2L} - \frac{1}{R} - \frac{\gamma}{r} = -4 \text{ дптр}. \tag{9}$$

Содержание	**Баллы**
Формула (1): $\frac{1}{F_1} = \frac{2}{r}$	0.2
Формула (2): $a_1 = L - F_1$	0.2
Формула (3): $l_1 = \varphi_0 F_1$	0.4
Формула (4): $\varphi_1 = \frac{l_1}{a_1}$	0.4
Формула (5): $-\frac{1}{F_2} = 2D + \frac{2}{R}$	0.2
Формула (6): $a_2 = L + F_2$	0.2
Формула (7): $l_2 = \varphi_0 F_2$	0.4
Формула (8): $\varphi_2 = \frac{l_2}{a_2}$	0.4
Формула (9): $D = \frac{\gamma+1}{2L} - \frac{1}{R} - \frac{\gamma}{r}$	0.2
Численное значение в формуле (9): $D = -4$ дптр	0.4
Итого	**3.0**

Задача 2. Паровой двигатель (10.0 балла)

Часть 1. Паровой двигатель без регулятора

2.1 Запишем уравнение адиабатного процесса

$$PV^\gamma = const \tag{1}$$

Применяя к процессу 2-3, получаем

$$\eta = \left(\frac{P_A}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0.177. \tag{2}$$

2.2 Для определения начальной температуры уравнение адиабаты надо записать в координатах (T, V)

$$TV^{\gamma-1} = const, \tag{3}$$

которое, повторно применяя к процессу 2-3, приводит к следующей формуле

$$T_0 = \frac{T_S}{\eta^{\gamma-1}} = 390 \text{ °C}. \tag{4}$$

2.3 Уравнения состояния идеального газа для точки 2 имеет вид

$$P_0 \eta V_0 = \frac{m_0}{M} R T_0, \tag{5}$$

которое дает

$$m_0 = M \frac{P_0 \eta V_0}{R T_0} = 2.30 \text{ г}, \tag{6}$$

2.4 На участке 1-2 работа пара равна

$$A_{1-2} = P_0 \eta V_0, \tag{7}$$

а на участке 2-3 работа на адиабате составляет

$$A_{2-3} = P_0 V_0 \frac{\eta - \eta^\gamma}{\gamma - 1}. \tag{8}$$

На участке 3-4 работа отрицательна и равна

$$A_{3-4} = -P_A V_0, \tag{9}$$

поэтому суммарная работа составляет

$$A_0 = P_0 V_0 \left(\eta + \frac{\eta - \eta^\gamma}{\gamma - 1}\right) - P_A V_0 = 1.25 \cdot 10^3 \text{ Дж}. \tag{10}$$

2.5 Рабочий объем достигает максимального значения за половину оборота махового колеса, поэтому средняя скорость изменения объема равна

$$v = \frac{V_0}{\pi/\omega} = \frac{V_0\omega}{\pi}. \quad (11)$$

2.6 Установим связь между давлением в цилиндре и массой пара в нем. Для этого запишем уравнение адиабатного процесса

$$P_0 V_{in}^{\gamma} = PV^{\gamma}, \quad (12)$$

где V_{in} – объем, который занимал пар в генераторе, до того, как он поступил в рабочий цилиндр. Для него справедливо уравнение состояния

$$P_0 V_{in} = \frac{m}{M} RT_0. \quad (13)$$

Тогда давление в цилиндре выражается через массу пара в нем из уравнения адиабатного процесса (12) и уравнения состояния (13) в виде

$$P = P_0 \left(\frac{RT_0}{MP_0}\frac{m}{vt}\right)^{\gamma}, \quad (14)$$

где $V = vt$ – изменяющийся рабочий объем.

С учетом заданного в условии уравнения, получаем искомое уравнение для массы пара в цилиндре имеет вид

$$\frac{dm}{dt} = K(P_0 - P) = KP_0\left(1 - \left(\frac{RT_0}{MP_0}\frac{m}{vt}\right)^{\gamma}\right). \quad (15)$$

2.7 Решением уравнения (15), очевидно, является линейная функция

$$m \propto t, \quad (16)$$

а значит в соответствии с формулой (14) давление пара в цилиндре остается постоянным.

2.8 В соответствии с (15) масса газа растет по линейному закону

$$m = K(P_0 - P)t, \quad (17)$$

поэтому из уравнения (15) и соотношения $V = vt$ получаем, что давление газа должно удовлетворять уравнению

$$P = P_0 \left(\frac{RT_0}{MP_0}\frac{\pi K(P_0 - P)}{V_0\omega}\right)^{\gamma}. \quad (18)$$

2.9 Теперь используем приближение $\gamma \approx 1$, что позволяет получить формулу для давления в явном виде

$$P = \frac{P_0}{1 + \frac{MV_0\omega}{\pi KRT_0}}. \quad (19)$$

2.10 Численное значение давления при указанных параметрах равно

$$P = 9.10 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (20)$$

2.11 Работа, совершаемая двигателем за один цикл, может быть рассчитана по формуле (10), в которой давление P_0 следует заменить на значение P, определяемое формулой (19), что приводит к следующему выражению

$$A = P_0 V_0 \frac{\eta + \frac{\eta - \eta^{\gamma}}{\gamma - 1}}{1 + \frac{MV_0\omega}{\pi KRT_0}}. \quad (21)$$

Таким образом, параметры этой формулы равны

$$A_0 = P_0 V_0 \left(\eta + \frac{\eta - \eta^{\gamma}}{\gamma - 1}\right) = 1.44 \cdot 10^3 \text{ Дж}, \quad (22)$$

$$\beta = \frac{MV_0}{\pi RT_0} = 4.16 \cdot 10^{-9} \text{ м} \cdot \text{с}^2. \quad (23)$$

2.12 В установившемся режиме работа пара за цикл равна работе, совершаемой над рабочим устройством

$$\frac{A_0}{1 + \beta\frac{\omega}{K}} = 2\pi M_0. \quad (24)$$

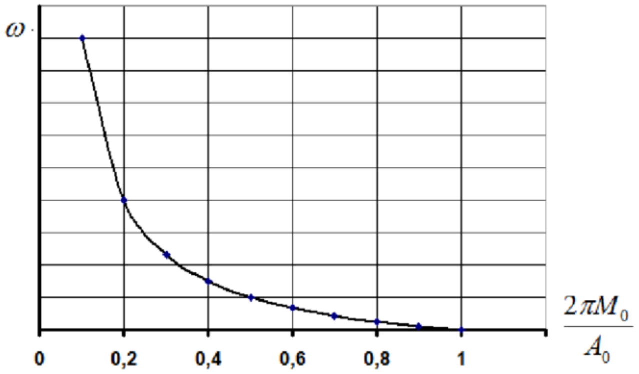
Отсюда следует, что средняя угловая скорость установившегося движения равна

$$\omega = \frac{K}{\beta}\left(\frac{A_0}{2\pi M_0} - 1\right). \quad (25)$$

2.13 Из формулы (25) следует, что максимальный момент равен

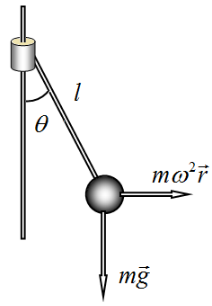
$$M_{0max} = \frac{A_0}{2\pi} = 230 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (26)$$

2.14 Схематический график зависимости показан на рисунке ниже.



Часть 2. Регулятор без двигателя

2.15 Проще данную часть задачи решать во вращающейся системе отсчета. В состоянии равновесия момент силы тяжести уравновешивается моментом центробежной силы



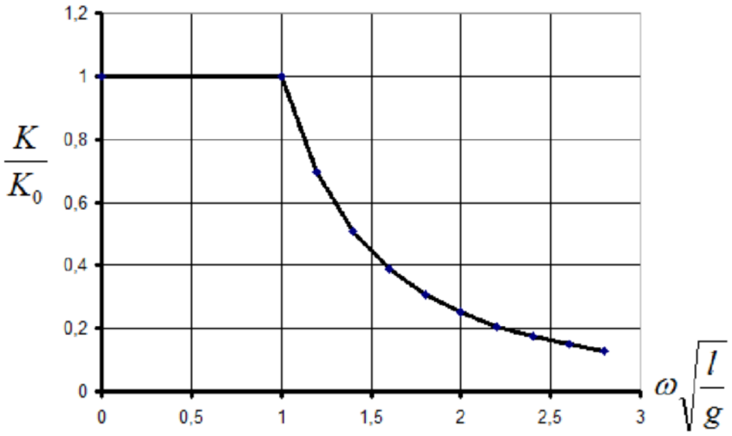
$$mgl\sin\theta = m\omega^2 l^2 \sin\theta\cos\theta. \tag{27}$$

Отсюда следует, что угол отклонения определяется формулой

$$\cos\theta = 1, \quad \omega < \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{28}$$

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l}, \quad \omega \geq \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{29}$$

2.16 График зависимости показан на рисунке ниже.

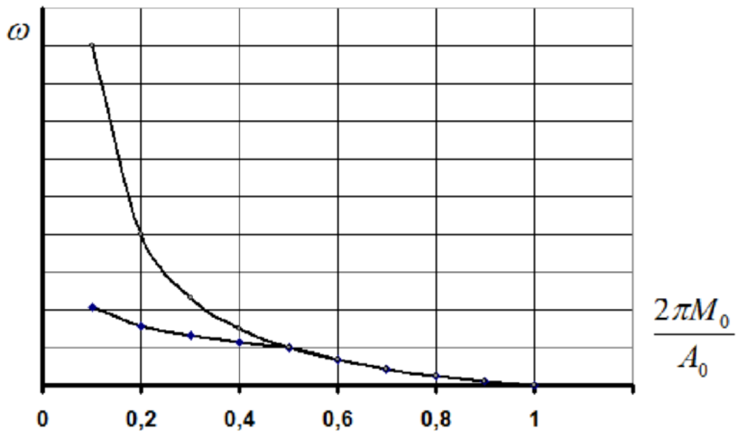


Часть 3. Двигатель с регулятором

2.17 Учитывая, что $K = K_0\cos\theta$ и принимая во внимание (19), получаем после подстановки в (25)

$$\omega = \sqrt[3]{\frac{K_0 g}{\beta l}\left(\frac{A_0}{2\pi M_0} - 1\right)}. \tag{30}$$

2.18 Схематический график зависимости показан на рисунке ниже.



	Содержание	Баллы	
2.1	Формула (1): $PV^{\gamma} = const$	0.2	**0.6**
	Формула (2): $\eta = \left(\frac{P_A}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$	0.2	
	Численное значение в формуле (2): $\eta = 0.177$	0.2	
2.2	Формула (3): $TV^{\gamma-1} = const$	0.2	**0.6**
	Формула (4): $T_0 = \frac{T_S}{\eta^{\gamma-1}}$	0.2	
	Численное значение в формуле (4): $T_0 = 390$ ℃	0.2	
2.3	Формула (6): $m_0 = M\frac{P_0\eta V_0}{RT_S}$	0.2	**0.4**
	Численное значение в формуле (6): $m_0 = 2.30$ г	0.2	
2.4	Формула (7): $A_{1-2} = P_0\eta V_0$	0.2	**1.0**
	Формула (8): $A_{2-3} = P_0V_0\frac{\eta-\eta^{\gamma}}{\gamma-1}$	0.2	
	Формула (9): $A_{3-4} = -P_AV_0$	0.2	
	Формула (10): $A_0 = P_0V_0\left(\eta + \frac{\eta-\eta^{\gamma}}{\gamma-1}\right) - P_AV_0$	0.2	
	Численное значение в формуле (10): $A_0 = 1.25\cdot10^3$ Дж	0.2	
2.5	Формула (11): $v = \frac{V_0\omega}{\pi}$	0.2	**0.2**
2.6	Формула (12): $P_0V_{in}^{\gamma} = PV^{\gamma}$	0.2	**1.0**
	Формула (13): $P_0V_{in} = \frac{m}{M}RT_0$	0.2	
	Формула (14): $P = P_0\left(\frac{RT_0}{MP_0}\frac{m}{vt}\right)^{\gamma}$	0.2	
	Формула (15): $\frac{dm}{dt} = KP_0\left(1 - \left(\frac{RT_0}{MP_0}\frac{m}{vt}\right)^{\gamma}\right)$	0.4	
2.7	Формула (16): $m \propto t$	0.4	**0.6**
	Ссылка на формулу (14) или (15)	0.2	
2.8	Формула (17): $m = K(P_0 - P)t$	0.2	**0.6**
	Формула (18): $P = P_0\left(\frac{RT_0}{MP_0}\frac{\pi K(P_0-P)}{V_0\omega}\right)^{\gamma}$	0.4	
2.9	Формула (19): $P = \frac{P_0}{1+\frac{MV_0\omega}{\pi KRT_0}}$	0.2	**0.2**
2.10	Численное значение в формуле (20): $P = 9.10\cdot10^5$ Па	0.2	**0.2**
2.11	Формула (21): $A = P_0V_0\frac{\eta+\frac{\eta-\eta^{\gamma}}{\gamma-1}}{1+\frac{MV_0\omega}{\pi KRT_0}}$	0.2	**1.0**
	Формула (22): $A_0 = P_0V_0\left(\eta + \frac{\eta-\eta^{\gamma}}{\gamma-1}\right)$	0.2	
	Численное значение в формуле (22): $A_0 = 1.44\cdot10^3$ Дж	0.2	
	Формула (23): $\beta = \frac{MV_0}{\pi RT_0}$	0.2	
	Численное значение в формуле (23): $\beta = 4.16\cdot10^{-9}$ м · с^2	0.2	
2.12	Формула (24): $\frac{A_0}{1+\beta\frac{\omega}{K}} = 2\pi M_0$	0.4	**0.6**
	Формула (25): $\omega = \frac{K}{\beta}\left(\frac{A_0}{2\pi M_0} - 1\right)$	0.2	
2.13	Формула (26): $M_{0max} = \frac{A_0}{2\pi}$	0.4	**0.6**
	Численное значение в формуле (26): $M_{0max} = 230$ Н · м	0.2	
2.14	График: обращается в ноль при превышении максимального момента указан максимальный момент монотонное возрастание при моменте, стремящемся к нулю	 0.1 0.1 0.2	**0.4**
2.15	Формула (27): $mgl\sin\theta = m\omega^2l^2\sin\theta\cos\theta$	0.2	**1.0**

	Формула (28): $\cos\theta = 1, \quad \omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$	0.4	
	Формула (29): $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l}, \quad \omega \geq \sqrt{\frac{g}{l}}$	0.4	
2.16	График: есть горизонтальный участок указано значение K_0 на горизонтальном участке монотонное стремление к нулю при возрастании угловой скорости	 0.1 0.1 0.2	**0.4**
2.17	Формула (30): $\omega = \sqrt[3]{\frac{K_0 g}{\beta l}\left(\frac{A_0}{2\pi M_0} - 1\right)}$	0.4	**0.4**
2.18	График: есть точка излома на первом участке убывает медленнее, чем на втором	 0.1 0.1	**0.2**
Итого			**10.0**

Задача 3. Электронный парамагнитный резонанс (10.0 баллов)

Магнитный момент

3.1 Площадь кругового витка радиуса R равна

$$S = \pi R^2 \tag{1}$$

и при протекании по нему тока I модуль его магнитного момента равен

$$m = I\pi R^2. \tag{2}$$

Магнитная индукция в центре кругового витка определяется выражением

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}, \tag{3}$$

откуда следует, что

$$\boldsymbol{B}_0 = \frac{\mu_0 \boldsymbol{m}}{2\pi R^3}. \tag{4}$$

3.2 Если $\boldsymbol{B}$ лежит в плоскости витка, то, анализируя пары сил Ампера, действующих на противоположные относительно вектора индукции магнитного поля элементы витка, можно показать, что модуль суммарного момента сил составляет

$$M = mB. \tag{5}$$

В общем случае магнитный момент $\boldsymbol{m}$ образует с полем угол φ. Разложим $\boldsymbol{B}$ на составляющие: одну в плоскости витка, а другую перпендикулярную ей. Очевидно, что перпендикулярная составляющая не создает момента сил, вызывая растяжение или сжатие витка, а так как проекция вектора B на плоскость витка составляет

$$B_{\parallel} = B\sin\varphi, \tag{6}$$

то модуль результирующего момента сил Ампера равен

$$M = mB\sin\varphi. \tag{7}$$

3.3 Элементарная работа dA при малом повороте витка на угол $d\varphi$ равна

$$dA = Md\varphi. \tag{8}$$

При повороте витка от состояния, когда $\boldsymbol{m} \uparrow\uparrow \boldsymbol{B}$, до положения $\boldsymbol{m} \uparrow\downarrow \boldsymbol{B}$, угол изменяется от 0 до π, а полная работа определяется интегралом

$$A = \int_0^{\pi} Md\varphi = 2mB. \tag{9}$$

Электронный парамагнитный резонанс

3.4 Пусть электрон вращается по круговой орбите радиуса R с периодом T, тогда его движение можно представить как круговой ток силой

$$I = \frac{e}{T} \tag{10}$$

и магнитным моментом

$$m = I\pi R^2. \tag{11}$$

Момент импульса электрона при движении по круговой траектории со скоростью v равен

$$L = m_e v R, \tag{12}$$

откуда, принимая во внимание выражение для периода обращения

$$T = \frac{2\pi R}{v}, \tag{13}$$

получаем

$$g_L = 1. \tag{14}$$

В векторном соотношении между магнитным и механическим моментами необходимо учитывать знак в силу отрицательности заряда электрона.

3.5 Согласно п. 3.3 для переворота спина необходимо совершить работу (9), что вместе с формулой в условии для магнитного момента дает

$$A = g_s B_0 \frac{e\hbar}{2m_e}, \tag{15}$$

которая совершается за счет энергии фотона

$$E = \hbar\omega, \tag{16}$$

то есть выполняется закон сохранения энергии

$$E = A. \tag{17}$$

Таким образом, используя $g_s = 2g_L = 2$, получаем

$$\omega = \frac{eB_0}{m_e} = 6.15 \cdot 10^{10}\ \text{c}^{-1}, \tag{18}$$

что равно так называемой Ларморовской циклической частоте вращения электрона в магнитном поле.

3.6 В отсутствие сердечника магнитное поле в соленоиде пропорционально силе тока, то есть

$$B_0 \propto I_0, \tag{19}$$

а при наличии сердечника магнитное поле также пропорционально магнитной проницаемости вещества

$$B \propto \mu I. \tag{20}$$

Резонанс наступает при одинаковой величине магнитной индукции, поэтому

$$I = \frac{I_0}{\mu} = 1.2\ \text{А}. \tag{21}$$

Термодинамическое равновесие

3.7 В состоянии термодинамического равновесия распределение электронов в атоме по энергетическим уровням подчиняется распределению Больцмана, поэтому

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right), \tag{22}$$

а с другой стороны полное число атомов известно и равно

$$N = N_1 + N_2. \tag{23}$$

Таким образом, из (22) и (23) получаем при условии $\hbar\omega \ll k_B T$

$$n_0 = \frac{\hbar\omega}{2k_B T} N = 4.68 \cdot 10^{17}. \tag{24}$$

3.8 В состоянии термодинамического равновесия скорости переходов вверх и вниз должны быть одинаковы, так как количество атомов на энергетических уровнях изменяться не должно, в частности для нижнего уровня имеем

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12}\rho N_1 + A_{21}N_2 + B_{21}\rho N_2 = 0, \tag{25}$$

откуда для плотности энергии электромагнитного излучения получаем

$$\rho = \frac{A_{21}}{B_{21}\left(\frac{N_1 B_{12}}{N_2 B_{21}} - 1\right)}. \tag{26}$$

Учитывая соотношение (22) и сравнивая с формулой Планка, заключаем, что

$$B_{12} = B_{21}. \tag{27}$$

Наличие внешнего источника микроволнового поля

3.9 С учетом равенства коэффициентов Эйнштейна и пренебрежения спонтанными переходами, уравнение (25) переписывается в виде

$$\frac{dN_1}{dt} = -kN_1 + kN_2, \tag{28}$$

которое с учетом (23) дает

$$\frac{dn}{dt} = -2kn. \tag{29}$$

Используя начальное условие $n(0) = n_0$, получаем решение уравнения (29) в виде

$$n(t) = n_0 \exp(-2kt). \tag{30}$$

Интересно отметить, что под действием внешнего источника переменного поля с течением времени разность в количестве атомов на двух уровнях падает до нуля.

3.10 Из формулы (30) следует, что
$$k = \frac{\ln 2}{2\tau}. \quad (31)$$

Так как при переходе каждого атома с нижнего уровня на верхний поглощается один квант энергии переменного поля $\hbar\omega$, а при каждом обратном переходе такая же энергия выделяется, то выражение, описывающее поглощение энергии E переменного поля в сердечнике имеет вид
$$\frac{dE}{dt} = kn\hbar\omega, \quad (32)$$
а это означает, что в начальный момент времени мощность источника равна
$$P = \frac{dE}{dt}(0) = \frac{n_0\hbar\omega \ln 2}{2\tau} = 1.05 \text{ мВт}. \quad (33)$$

3.11 Рассмотрим случай отсутствия внешнего поля, тогда приведенное в условии уравнение для уровня 1 переписывается в виде
$$\frac{dn}{dt} = N(\alpha_2 - \alpha_1) - n(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (34)$$

Поскольку уравнение (34) должно включать в себя условие термодинамического равновесия, то при обращении слева производной в ноль равновесная концентрация должна быть равна n_0, откуда следует, что
$$N = n_0 \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (35)$$

Подставляя (35) в (34) и добавляя член из (29), получаем уравнение для с учетом наличия переменного поля
$$\frac{dn}{dt} = -2kn - (n - n_0)(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (36)$$

Так как требуется определить мощность источника в стационарном режиме, то и разность в числе атомов на нижнем и верхнем уровне должна быть постоянной, то есть $dn/dt = 0$, откуда следует
$$n = \frac{n_0}{1 + \frac{2k}{(\alpha_1 + \alpha_2)}}. \quad (37)$$

Мощность источника по-прежнему определяется уравнением (42) и с учетом того, что $2k \gg (\alpha_1 + \alpha_2)$, окончательно получаем
$$P = \frac{1}{2} n_0 \hbar\omega(\alpha_1 + \alpha_2) = 1.01 \text{ мкВт}. \quad (38)$$

Обратите внимание, что в отличие от 3.10 мощность источника не зависит от плотности энергии электромагнитного поля, это так называемый режим насыщения.

	Содержание	Баллы	
3.1	Формула (1): $S = \pi R^2$	0.2	**0.8**
	Формула (2): $m = I\pi R^2$	0.2	
	Формула (3): $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$	0.2	
	Формула (4): $\boldsymbol{B}_0 = \frac{\mu_0 \boldsymbol{m}}{2\pi R^3}$	0.2	
3.2	Формула (5): $M = mB$	0.2	**0.6**
	Формула (6): $B_\parallel = B\sin\varphi$	0.2	
	Формула (7): $M = mB\sin\varphi$	0.2	
3.3	Формула (8): $dA = Md\varphi$	0.2	**0.4**
	Формула (9): $A = 2mB$	0.2	
3.4	Формула (10): $I = \frac{e}{T}$	0.2	**1.0**
	Формула (11): $m = I\pi R^2$	0.2	
	Формула (12): $L = m_e vR$	0.2	
	Формула (13): $T = \frac{2\pi R}{v}$	0.2	
	Формула (14): $g_L = 2$	0.2	

3.5	Формула (15): $A = g_s B_0 \frac{e\hbar}{2m_e}$	0.2	**1.0**
	Формула (16): $E = \hbar\omega$	0.2	
	Формула (17): $E = A$	0.2	
	Формула (18): $\omega = \frac{eB_0}{m_e}$	0.2	
	Численное значение в формуле (18): $\omega = 6.15 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$	0.2	
3.6	Формула (19): $B_0 \propto I_0$	0.2	**0.8**
	Формула (20): $B \propto \mu I$	0.2	
	Формула (21): $I = \frac{I_0}{\mu}$	0.2	
	Численное значение в формуле (21): $I = 1.2$ A	0.2	
3.7	Формула (22): $\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)$	0.2	**1.0**
	Формула (23): $N = N_1 + N_2$	0.2	
	Формула (24): $n_0 = \frac{\hbar\omega}{2k_B T} N$	0.3	
	Численное значение в формуле (24): $n_0 = 4.68 \cdot 10^{17}$	0.3	
3.8	Формула (25): $-B_{12}\rho N_1 + A_{21} N_2 + B_{21}\rho N_2 = 0$	0.4	**1.0**
	Формула (26): $\rho = \frac{A_{21}}{B_{21}\left(\frac{N_1 B_{12}}{N_2 B_{21}} - 1\right)}$	0.4	
	Использование формулы (22)	0.2	
3.9	Формула (28): $\frac{dN_1}{dt} = -kN_1 + kN_2$	0.2	**0.6**
	Формула (29): $\frac{dn}{dt} = -2kn$	0.2	
	Формула (30): $n(t) = n_0 \exp(-2kt)$	0.2	
3.10	Формула (31): $k = \frac{\ln 2}{2\tau}$	0.2	**0.8**
	Формула (32): $\frac{dE}{dt} = kn\hbar\omega$	0.2	
	Формула (33): $P = \frac{n_0 \hbar\omega \ln 2}{2\tau}$	0.2	
	Численное значение в формуле (33): $P = 1.05$ мВт	0.2	
3.11	Формула (34): $\frac{dn}{dt} = N(\alpha_2 - \alpha_1) - n(\alpha_1 + \alpha_2)$	0.3	**2.0**
	Формула (35): $N = n_0 \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_2-\alpha_1)}$	0.3	
	Формула (36): $\frac{dn}{dt} = -2kn - (n - n_0)(\alpha_1 + \alpha_2)$	0.3	
	Формула (37): $n = \frac{n_0}{1+\frac{2k}{(\alpha_1+\alpha_2)}}$	0.3	
	Формула (38): $P = \frac{1}{2} n_0 \hbar\omega(\alpha_1 + \alpha_2)$	0.3	
	Численное значение в формуле (38): $P = 1.01$ мкВт	0.5	
Итого			**10.0**